ANNEE 1975

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

(Elèves officiers de l'Air, Elèves Officiers Mécaniciens de l'Air, Elèves Officiers des Bases de l'Air)

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée 3 heures)

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif K, le caractéristique de ce corps étant différent de 2.

Les fonctions f, g ... sont des endomorphismes de l'espace vectoriel E, c'est à dire des applications linéaires de E dans E.

Le problème consiste en l'étude des fonctions f vérifiant

$$f \circ f = \lambda f \qquad \begin{cases} \lambda \in K \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

On appelle Φ_λ l'ensemble des fonctions f correspondant à une même valeur de λ.

On rappelle qu'une fonction appartenant à Φ_1 est une projection (ou un projecteur).

1) Montrer que toute fonction de Φ_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

2) Montrer que si $f \in \Phi_\lambda$, le noyau de f (ou ker f) et l'image de f sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

On pourra utiliser l'égalité

$$(\vec{x} \in E) \qquad \vec{x} = \vec{x} - \frac{1}{\lambda} f(\vec{x}) + \frac{1}{\lambda} f(\vec{x})$$

3) Si $f \in \Phi_\lambda$ et $g \in \Phi_\lambda$
on a $(f + g) \in \Phi_\lambda$
si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f = 0$ (application constante zéro)
(on pourra multiplier $f \circ g + g \circ f = 0$ par f à droite, à gauche)

4) Si $f \in \Phi_{\lambda 1}$
$g \in \Phi_{\lambda 2}$
$f \circ g = g \circ f$
on a $g \circ f \in \Phi_\mu$ μ dépendant de λ_1 et λ_2

5) Soit I l'application identique de E
Si $f \in \Phi_1$ on a $[f - I] \in \Phi_{-1}$
Si $f \in \Phi_{-1}$ on a $[f + I] \in \Phi_1$

6) Soit u un endomorphisme de E (n'appartenant pas a une famille Φ) vérifiant
$(u - a\,I) \circ (u - b\,I) = 0$ (application zéro)
$a \in K$ $b \in K$ $a \neq b$

a) Montrer que $v = u - a\,I \in \Phi_\lambda$
$w = u - b\,I \in \Phi_\mu$
λ et μ dépendant de a et b

b) Mettre u sous la forme $u = \alpha v + \beta w$ $\begin{pmatrix} \alpha \in K \\ \beta \in K \end{pmatrix}$

et en déduire $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fonctions}}$

7) Soit la matrice carrée d'ordre 3 sur les réels

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'on peut trouver 2 réels a et b tels que

$(A - a\,U)\,(A - b\,U) = 0$ (matrice zéro)
U étant la matrice unité

En déduire A^n (puissance quelconque de A)

8) On suppose maintenant E de dimension finie. On le rapporte à une base formée de la réunion d'une base du noyau de f, et d'une base de l'image f (avec toujours $f \in \Phi\lambda$).

Quelle est la forme de la matrice de f rapportée à cette base ?

9) On considère la matrice d'ordre n sur les réels.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \\ 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

représentant un endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps des réels. Trouver les valeurs propres, les vecteurs propres de M.

Montrer qu'on peut trouver dans E une base de vecteurs propres ; quelle est la matrice M_1 de l'application φ rapportée à cette nouvelle base ?

10) Sans utiliser le résultat précédent on reprend l'étude de la fonction φ définie par la matrice M.

Etudier d'après cette matrice le noyau et l'image de φ ; donner une base de ces deux sous-espaces.

Vérifier que φ appartient à une famille Φ_λ.

En appliquant le résultat de la question 8 retrouver la matrice M_1 précédente.

11) E est maintenant l'espace euclidien de la géométrie élémentaire, c'est à dire un espace euclidien de dimension 3 sur le corps des réels.

Cet espace étant rapporté à une base orthonormée on considère l'application φ de matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

D'aprés la matrîce M_1 de l'application φ rapportée à cette base, donner une définition géométrique simple de φ.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail